$$\Leftrightarrow e^{-x} \leq e^{-t} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow t^n e^{-x} \leq t^n e^{-t} \leq t^n$$
$$\Rightarrow \int_0^x t^n e^{-x} dt \leq \int_0^x t^n e^{-t} dt \leq \int_0^x t^n dt \quad \text{car } x > 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \leq \int_0^x t^n e^{-t} dt \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x} \leq F_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4) Soit x un réel strictement positif.

a- Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2x$, on a :

$$\frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{x}{n} - \frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{2x-n}{2n}\right] < 0 \quad \text{car } n \geq 2x.$$

b- posons $u_n = \frac{x^n}{n!}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ avec n_0 est le plus petit entier $\geq 2x$

D'après la question précédente $\forall n \geq n_0; u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ de plus $u_n > 0$

On a donc:
$$0 < u_{n_0+1} \leq \frac{1}{2}u_{n_0}$$
$$0 < u_{n_0+2} \leq \frac{1}{2}u_{n_0+1}$$
$$0 < u_{n_0+3} \leq \frac{1}{2}u_{n_0+2}$$
.....
.....
.....
$$0 < u_n \leq \frac{1}{2}u_{n-1}$$

En multipliant ces inégalités puis en simplifiant on obtient:

$$\forall n \geq n_0; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}\right] = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1,1[$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$.

c- $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall x > 0$ on a :.

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x} \leq F_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x} \leq n!\left[1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\right] \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n!)}e^{-x} \leq \left[1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\right] \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n!)}$$
$$\Leftrightarrow e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leq e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right] = e^x$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.